مكثف
النجوم
في
الرياضيات

تطبيقات التفاضل / الفرع العلمي

اعداد الاستاذ

إياد عماد عباد

0799366611

eyad emad abbad

eyad _ abbad

الوحدة الثالثة : تطبيقات التفاضل :

مثال (١) :

اكتب معادلة المماس لمنحنى $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - ١$ عند تقاطع محور السينات

الحل :

يقطع السينات $\Leftarrow \text{ص} = ٠$

$\text{س}^{٣} - ١ = ٠ \Leftarrow \text{س}^{٣} = ١ \Leftarrow \boxed{\text{س} = ١}$

$\text{ق}(١) = (١)^{٣} - ١ = ٠ \quad (\text{ص}_{١})$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢}$

$\text{ق}'(١) = ٣(١)^{٢} = ٣ \quad (\text{م})$

$\text{ص} - \text{ص}_{١} = \text{م}(\text{س} - \text{س}_{١})$

معادلة المماس : $\text{ص} - ٠ = ٣(\text{س} - ١)$

مثال (٢) :

احسب النقاط التي على منحنى $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - ٥\text{س} + ٦$ التي يكون المماس عندها يوازي المستقيم $\text{ص} - ٧\text{س} = ١١$

الحل :

$\text{ص} - ٧\text{س} = ١١ \Leftarrow \text{ص} = ١١ + ٧\text{س}$

يوازي $\Leftarrow \text{ق}' = \text{ص}'$

$٣\text{س}^{٢} - ٥ = ٧$

$٣\text{س}^{٢} = ١٢ \Leftarrow \text{س}^{٢} = ٤ \Leftarrow \text{س} = ٢ \text{ ، } -٢$

$(٢ ، \text{ق}(٢)) \quad (٢ ، ٤)$

$(-٢ ، \text{ق}(-٢)) \quad (-٢ ، ٨)$

مثال (٣) :

اكتب معادلة المماس لمنحنى $(\text{س} + \text{ص})^{٣} - ٥\text{س} + ٧\text{ص} = ١٠$ ، عند تقاطع مع المستقيم $\text{س} + \text{ص} = ٢$

الحل :

$\text{س} + \text{ص} = ٢ \Leftarrow \text{ص} = ٢ - \text{س}$

$(\cancel{\text{س}} + ٢ - \cancel{\text{س}})^{٣} - ٥\text{س} + ٧(٢ - \text{س}) = ١٠$

$٨ - ٥\text{س} + ١٤ - ٧\text{س} = ١٠ \Leftarrow \boxed{\text{س} = ١.}$

$\Leftarrow \text{ص} = ٢ - ١ = ١ \Leftarrow (١ ، ١)$

نشتق : $٣(\text{س} + \text{ص})^{٢}(١ + \text{ص}') - ٥ + ٧\text{ص}' = ٠$

نعوض : $٣(١ + ١)^{٢}(١ + \text{ص}') - ٥ + ٧\text{ص}' = ٠$

$\Leftarrow \text{ص}' = \frac{-٧}{١٩}$

معادلة المماس : $\text{ص} - ١ = \frac{-٧}{١٩}(\text{س} - ١)$

مثال (٤) :

بين ان لمنحنى $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ٨$ مماسين مرسومين من $(١ ، ٥)$ خارجية التي لا تقع عليه

الحل :

نفرض التماس $(\text{س} ، \text{ص})$

$\text{ق}' = \frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}} \Leftarrow \text{ق}' = \frac{\text{ص} - ٥}{\text{س} - ١}$

$\Leftarrow ٢\text{س} = \frac{\text{س}^{٢} + ٨ - ٥}{\text{س} - ١}$

$\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٣ = ٠$

$\Leftarrow (\text{س} - ٣)(\text{س} + ١) = ٠ \Leftarrow \boxed{\text{س} = ٣ \text{ ، } -١}$

$\Leftarrow$ يوجد مماسان

$\Leftarrow$ النقاط $(٣ ، ١٧) \quad (-١ ، ٩)$

مثال (٥) :

١) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + \text{أ}\text{س} + \text{أ}$ ، فما قيمة (أ) اذا كان ق(س) يمس السينات

الحل :

$\text{ق}' = ٠ \Leftarrow ٢\text{س} + \text{أ} = ٠ \Leftarrow \boxed{\text{س} = \frac{-\text{أ}}{٢}}$

ق$\left(\frac{-أ}{2}\right) = 0$

$\left(\frac{-أ}{2}\right)^2 + أ\left(\frac{-أ}{2}\right) + أ = 0$

$\frac{أ^2}{4} - \frac{أ^2}{2} + أ = 0 \quad \times 4$

$أ^2 - 2أ^2 + 4أ = 0 \Leftarrow 4أ - أ^2 = 0$

$\Leftarrow أ(4 - أ) = 0 \Leftarrow أ = 0 ، 4$

٢) اذا كان المستقيم ص = ٢س يمس ق $= (س^2 - 2)(أس + ب)$ عند س = ٢ ، فما قيم أ ، ب

الحل :

ص(٢) = ق(٢)	ص′(٢) = ق′(٢)
$4 = (4 - 2)(2أ + ب)$	$2 = (س^2 - 2)(أ) + (أس + ب)(2س)$
$4أ + 2ب = 4 \ldots (1)$	$2 = 2أ + 8أ + 4ب$
	$10أ + 4ب = 2 \ldots (2)$

بالحذف : أ = −٣ ، ب = ٨

٣) اوجد قيم (س) التي على منحنى ق = س − جا٢س التي يكون العمودي على المماس موازي لمحور الصادات لكل س $\in [0 ، 2\pi]$

الحل :

قاعدة :

العمودي يوازي الصادات ⟸ المماس يوازي السينات

ق′ = ٠

١ − ٢جتا٢س = ٠ ⟸ جتا٢س = $\frac{1}{2}$

$\frac{2س}{2} = \frac{60}{2} ، \frac{300}{2} ، \frac{420}{2} ، \frac{660}{2}$

س = ٣٠ ، ١٥٠ ، ٢١٠ ، ٣٣٠ $\in [0 ، 2\pi]$

٤) اذا كانت معادلة المماس لمنحنى ق(س) عندما س = ٢ هي ص + ٣س = ١١ وكانت معادلة العمودي لمنحنى هـ(س) عندما س = ٢ هي ٥ص + ٢س = ٩ وكانت ل(س) = (ق × هـ)(س) ، احسب ل′(٢)

الحل :

ل′(٢) = ق(٢) × هـ′(٢) + هـ(٢) × ق′(٢)

حيث

ص = ١١ − ٣س	٥ص = ٩ − ٢س
ص(٢) = ١١ − ٦	ص = $\frac{9}{5} - \frac{2}{5}$س
= ٥ = ق(٢)	ص′ = $\frac{-2}{5}$ عمودي
ص′ = −٣	هـ = $\frac{5}{2}$
ق′(٢) = −٣	ص(٢) = ١ ⟸ هـ(٢) = ١

⟸ ل′(٢) = $5 \times \frac{5}{2} + 1 \times -3 = \frac{19}{2}$

مثال (٦) :

١) احسب مساحة المثلث المكون من مماس المنحنى ص = $\frac{1}{س}$ عند $(أ ، \frac{1}{أ})$ والمحاور

الحل :

$م_1 = \frac{-1}{س^2} = \frac{-1}{أ^2}$	$(س ، 0)\ (أ ، \frac{1}{أ})$
	$م_2 = \frac{\frac{1}{أ} - 0}{أ - س}$

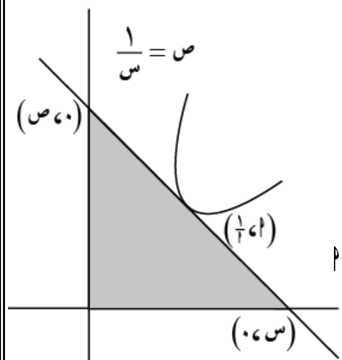
$م_1 = م_2$

$\frac{-1}{أ^2} = \frac{\frac{1}{أ}}{أ - س}$

$-أ + س = \frac{1}{أ} \times أ^2$

$-أ + س = أ \Leftarrow س = 2أ$

$(أ ، \frac{1}{أ})\ (0 ، ص)$



$\Leftarrow$ م٢ = $\frac{\text{ص} - \frac{١}{\text{أ}}}{٠ - \text{أ}}$

$\frac{-١}{\text{أ}^٢} = \frac{\text{ص} - \frac{١}{\text{أ}}}{-\text{أ}}$ $\Leftarrow$ ص $- \frac{١}{\text{أ}} = \frac{-١}{\text{أ}^٢} \times -$أ $\Leftarrow$ $\boxed{\text{ص} = \frac{٢}{\text{أ}}}$

المساحة = $\frac{١}{٢}$ س × ص = $\frac{١}{٢} \times ٢\text{أ} \times \frac{٢}{\text{أ}} = \boxed{٢}$

٢) اوجد النقاط التي يكون عندها المماس لمنحنى العلاقة ٩س٢ + ١٦ص٢ = ٥٢ موازيا للمستقيم ٩س − ٨ص = ١

الحل :

ميل الماس = ميل المستقيم

٩س − ٨ص = ١ $\Leftarrow$ ص = $\frac{٩}{٨}$ س $- \frac{١}{٨}$ $\Leftarrow$ ص′ = $\frac{٩}{٨}$

٩س٢ + ١٦ص٢ = ٥٢ $\Leftarrow$ ١٨س + ٣٢ص ص′ = ٠

$\Leftarrow$ ص′ = $\frac{-٩\text{س}}{١٦\text{ص}}$

ص′ = ص′

$\frac{-٩\text{س}}{١٦\text{ص}} = \frac{٩}{٨}$ $\Leftarrow$ +س = −٢ص

لكن : ٩س٢ + ١٦ص٢ = ٥٢

٩(−٢ص)٢ + ١٦ص٢ = ٥٢

٣٦ص٢ + ١٦ص٢ = ٥٢

ص٢ = ١ $\Leftarrow$ ص = ±١

ص = ١ $\Leftarrow$ س = −٢ ، ص = −١ $\Leftarrow$ س = ٢

النقاط (−٢،١) (٢،−١)

٣) عين قيم (جـ) في ق(س) = جـ س٢ اذا كانت زاوية ميل المماس لمنحنى ق عندما س = ١ هي (٤٥°)

الحل :

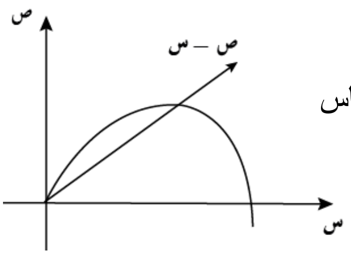
الميل = ظاهـ = ق′

ق′(١) = ظا٤٥ = ١

٢جـ س = ١ $\Leftarrow$ ٢جـ × ١ = ١ $\Leftarrow$ جـ = $\frac{١}{٢}$

٤) من الشكل المجاور ، احسب قياس الزاوية المحصورة بين ص = س ومماس منحنى الاقتران ق = √٣ س − س٢ عند (٠،٠)

الحل :



نجد الزاوية التي يكونها المماس مع الاتجاه الموجب للسينات

ق′ = √٣ − ٢س

ميل المماس ق′(٠) = √٣ $\Leftarrow$ المماس يكون زاوية (٦٠)

نجد الان الزاوية التي يكونها المستقيم ص = س مع الاتجاه الموجب للسينات

ص′ = ١ $\Leftarrow$ الزاوية التي ظلها (١) هي (٤٥)

$\Leftarrow$ الزاوية بين المماس والمستقيم ص = س هي ٦٠ − ٤٥ = ١٥

٥) اثبت ان المماسين المرسومين لمنحنى العلاقتين ٤س٢ + ٩ص٢ = ٤٥ ، س٢ − ٤ص٢ = ٥ عند نقطة تقاطع المنحنيين في الربع الاول متعامدين

الحل :

س٢ = ٥ + ٤ص٢

٤(٥ + ٤ص٢) + ٩ص٢ = ٤٥

٢٠ + ٢٥ص٢ = ٤٥ $\Leftarrow$ ص٢ = ١ $\Leftarrow$ ص = ±١

$\Leftarrow$ س٢ = ٥ + ٤ = ٩ $\Leftarrow$ س = ±٣

$\Leftarrow$ التماس (٣،١) بالربع الاول

الان نشتق كل منحنى لمعرفة ميل المماسين

س٢ − ٤ص٢ = ٥	٤س٢ + ٩ص٢ = ٤٥
٢س − ٨ص ص′ = ٠	٨س + ١٨ص ص′ = ٠
ميل عند (٣،١) =	ميل عند (٣،١) =
ص′ = $\frac{٣}{٤}$	٢٤ + ١٨ص′ = ٠
	ص′ = $\frac{-٤}{٣}$

$\text{م}_1 \times \text{م}_2 = \frac{٣}{٤} \times \frac{-٤}{٣} = -١$ متعامدين

٦) اذا كان ع $= \frac{\text{هـ}^2(\text{س}) + \text{س}}{\text{ل}(\text{س})}$ وكان يوجد مماس مشترك افقي للاقترانين هـ ، ل عند (٣،٤) ، احسب ع$'$(٣)

الحل :

مماس افقي مشترك عند (٣،٤)

$\Leftarrow \begin{cases} \text{هـ}(٣) = \text{ل}(٣) = ٤ \\ \text{هـ}'(٣) = \text{ل}'(٣) = ٠ \end{cases}$

$\text{ع}' = \frac{(٢\text{هـهـ}' + ١)(\text{ل}) - \text{ل}' \times (\text{هـ}^2 + \text{س})}{(\text{ل})^2}$

$\text{ع}'(٣) = \frac{(٠+١)\text{ل}(٣) - ٠}{((\text{ل}(٣))^2} = \frac{٤}{١٦}$

٧) اوجد قيمة كل من أ ، ب ، جـ اذا كان ع(س) = س^2 + أس + ب ، هـ(س) = جـس − س^2 اذا كان المنحنيان يمس بعضهما البعض عند النقطة (١،٠)

الحل :

المنحنيان يمس بعضهما البعض عند النقطة (١،٠)

⟸ ع(١) = ٠ ، هـ(١) = ٠

⟸ هـ(١) = جـ − ١ = ٠ ⟸ جـ = ١

ع(١) = ٠ ⟸ ١ + أ + ب = ٠ ⟸ أ + ب = −١ ...(١)

ع$'$(س) = ٢س + أ

هـ$'$(س) = جـ − ٢س = ١ − ٢س

لكن ع$'$(١) = هـ$'$(١)

٢ + أ = ١ − ٢ ⟸ ٢ + أ = −١ ⟸ أ = −٣

بالتعويض في (١) ⟸ أ + ب = −١

−٣ + ب = −١ ⟸ ب = ٢

٨) اذا كان ع(س) = س × ل$'$(٢س) وكانت ص $= \frac{٤٨ - \text{س}}{٥}$ تمثل معادلة العمودي على المماس لمنحنى ع عندما س = ٣ ، اوجد ل$''$(٦)

الحل :

$\text{ع}(٣) = \frac{٤٨ - ٣}{٥} = ٩$

$\text{ص}' = \frac{-١}{٥} \Leftarrow \text{ع}'(٣) = ٥$

$\Leftarrow \text{ل}'(٢\text{س}) = \frac{\text{ع}(\text{س})}{\text{س}}$

$\Leftarrow \text{ل}''(٢\text{س}) \times ٢ = \frac{\text{س ع}'(\text{س}) - ١ \times \text{ع}(\text{س})}{\text{س}^2}$

عندما س = ٣

$\Leftarrow ٢\text{ل}''(٦) = \frac{٣ \times ٥ - ٩ \times ١}{٩} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣} \Leftarrow \text{ل}''(٦) = \frac{١}{٣}$

مثال (٧) :

١) قذف جسيم للأعلى عن سطح الارض فإذا كانت المسافة المقطوعة تعطى بالعلاقة : ف = ٩٦ن − ١٦ن^2 حيث (ن) الزمن بالثواني ، (ف) بالقدم ، احسب ما يلي :

أ) سرعة الجسيم بعد ثانية واحدة من بدء الحركة

ب) متى يصل الجسيم لأقصى ارتفاع

ج) المسافة التي يقطعها الجسيم حتى يعود للأرض

الحل :

أ) ف = ٩٦ن − ١٦ن^2

ع = ف$'$ = ٩٦ − ٣٢ن

ت = ع$'$ = −٣٢

⟸ ع(١) = ٩٦ − ٣٢ × ١ = ٩٦ − ٣٢ = ٦٤ قدم / ث

ب) يصل الجسيم لأقصى ارتفاع عندما ع = ٠

⟸ ع = ٠ ⟸ ٩٦ − ٣٢ن = ٠

⟸ ٣٢ن = ٩٦ ⟸ ن = ٣ ثواني

ج) المسافة التي يقطعها حتى يصل الارض = ٢ × مسافة اقصى ارتفاع

∴ اقصى ارتفاع

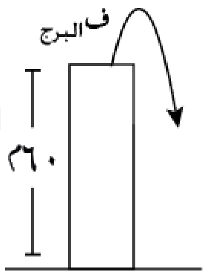
ف(٣) = ٩٦ × ٣ − ١٦ × ٣^{٢} = ١٤٤ قدم

∴ المسافة التي يقطعها حتى يعود للأرض

= ١٤٤ × ٢ = ٢٨٨ قدم

٢) قذف جسيم من سطح برج ارتفاعه (٦٠) متر حسب العلاقة : ف = ١١ن − ن^{٢} ، احسب سرعة الجسيم وهو على ارتفاع (٩٠) متر من سطح الارض

الحل :



ف$_{\text{البرج}}$ = −ن^{٢} + ١١ن

ف$_{\text{الارض}}$ = −ن^{٢} + ١١ن + ٦٠

ع = −٢ن + ١١ ، ت = −٢

ف = ٩٠م ⟸ −ن^{٢} + ١١ن + ٦٠ = ٩٠

اضرب المعادلة بـ (−١) ⟸ ن^{٢} − ١١ن + ٣٠ = ٠

⟸ (ن − ٦)(ن − ٥) = ٠ ⟸ ن = ٦ ، ن = ٥

ع|$_{ن=٦}$ = −٢ × ٦ + ١١ = −١م/ث (هابط)

ع|$_{ن=٥}$ = −١٠ + ١١ = ١م/ث (صاعد)

٣) يتحرك جسيم حسب العلاقة : ف = جا^{٤}ن ، احسب التسارع عندما تنعدم السرعة لأول مرة من بدء الحركة

الحل :

ع = ٤جا^{٣}ن جتان = ٠

٤جا^{٣}ن = ٠	جتان = ٠
جان = ٠	ن = $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$
ن = ٠ ، π ، ٢π	

ن = $\frac{\pi}{٢}$

ت = ٤جا^{٣}ن × −جان + جتان × ١٢ جا^{٢}ن جتان

= −٤جا^{٤}ن + ١٢ جا^{٢}ن جتا^{٢}ن

ت($\frac{\pi}{٢}$) = −٤ × ١ + ١٢ × ١ × ٠ = −٤

٤) من سطح بناية اسقط جسيم حسب العلاقة : ف$_{١}$ = ٥ن^{٢} وبعد ثانية قذف جسيم اخر رأسيا للأسفل من نفس المكان ف$_{٢}$ = ١٥ن + ٥ن^{٢} فوصل الجسمان الارض معا ، احسب سرعة كل من الجسيمين لحظة وصول الارض وما ارتفاع البناية

الحل :

اذا احتاج الجسيم الثاني (ن) ثانية فان الاول : (ن + ١)

ف$_{١}$(ن + ١) = ف$_{٢}$(ن)

٥(ن + ١)^{٢} = ١٥ن + ٥ن^{٢}

٥ن^{٢} + ١٠ن + ٥ = ١٥ن + ٥ن^{٢}

٥ن = ٥ ⟸ ن = ١

ف$_{١}$(٢) = ٥ × ٤ = ٢٠

ف$_{٢}$(١) = ١٥ × ١ + ٥ × ١ = ٢٠ ⟸ ارتفاع البناية = ٢٠

ع$_{١}$ = ١٠ن ⟸ ع$_{١}$(٢) = ٢ × ١٠ = ٢٠

ع$_{٢}$ = ١٥ + ١٠ن ⟸ ١٥ + ١٠ × ١ = ٢٥

٥) يتحرك جسمان بحيث ع^{٢} = ف^{٣} ، احسب التسارع عندما السرعة تساوي ٨م/ث

الحل :

ع^{٢} = ف^{٣} ⟸ ٢ع ع′ = ٣ف^{٢} ف′

⟸ ٢ت $\cancel{ع}$ = ٣ف^{٢} $\cancel{ع}$

ت = $\frac{٣ف^{٢}}{٢}$	عندما ع = ٨
= $\frac{٣ \times ١٦}{٢}$ = ٢٤	(٨)^{٢} = ف^{٣}
	٦٤ = ف^{٣} ⟸ ف = ٤

٦) اذا كانت $\text{ع} = \text{أ}\sqrt{\text{ف}}$ ، $\text{أ} > ٠$ وكان تسارع الجسيم يساوي ٨م / ث^{٢} ، فما قيمة (أ)

الحل :

$$\text{ع}' = \frac{\text{أ} \times \text{ف}'}{٢\sqrt{\text{ف}}} \quad ، \quad \text{ت} = \frac{\text{أ} \times \text{ع}}{٢\sqrt{\text{ف}}}$$

$$٨ = \frac{\text{أ} \times \text{أ}\cancel{\sqrt{\text{ف}}}}{٢\cancel{\sqrt{\text{ف}}}} \Leftarrow ١٦ = \text{أ}^{٢} \Leftarrow \text{أ} = ٤$$

٧) اسقط جسيم من ارتفاع ١٠٠م حيث $\text{ف}_{١} = ٥\text{ن}^{٢}$ وفي الوقت نفسه قذف جسيم للاعلى $\text{ف}_{٢} = ٥٠\text{ن} - ٥\text{ن}^{٢}$ ، اوجد سرعة كل من الجسيمين عندما يكون لهما الارتفاع نفسه عن سطح الارض

الحل :

$$\text{ف}_{١} + \text{ف}_{٢} = ١٠٠$$

$$٥\text{ن}^{٢} + ٥٠\text{ن} - ٥\text{ن}^{٢} = ١٠٠ \Leftarrow ٥٠\text{ن} = ١٠٠ \Leftarrow \text{ن} = ٢$$

سرعة الجسيم الاول : $\text{ع}_{١} = \text{ف}'_{١}(\text{ن}) = ١٠\text{ن}$

$$\Leftarrow \text{ف}'_{١}(٢) = ١٠ \times ٢ = ٢٠ \text{م/ث}$$

سرعة الجسيم الثاني : $\text{ع}_{٢} = \text{ف}'_{٢}(\text{ن}) = ٥٠ - ١٠\text{ن}$

$$\Leftarrow \text{ف}'_{٢}(٢) = ٥٠ - (١٠ \times ٢) = ٣٠ \text{م/ث}$$

٨) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث ان بعده عن نقطة ثابتة بالأمتار بعد (ن) ثانية من بدء حركته يعطى وفقا للاقتران : $\text{ف}(\text{ن}) = \text{ن}^{٣}$ ، فإذا كانت سرعته المتوسطة في الفترة الزمنية $[٠ ، \text{أ}]$ تساوي سرعته اللحظية عندما $\text{ن} = ٢$ ، جد قيمة (أ)

الحل :

$$\text{ع} = \text{ف}' = ٣\text{ن}^{٢} \Leftarrow \text{ع}(٢) = ١٢$$

$$\text{السرعة المتوسطة} = \frac{\text{ف}(\text{أ}) - \text{ف}(٠)}{\text{أ} - ٠} = \frac{\text{أ}^{٣} - ٠}{\text{أ}} = ١٢$$

$$\text{أ}^{٣} = ١٢\text{أ} \Leftarrow \text{أ}^{٣} - ١٢\text{أ} = ٠$$

$$\Leftarrow \text{أ}(\text{أ}^{٢} - ١٢) = ٠ \Leftarrow \text{أ} = ٠ ، \sqrt{١٢} ، -\sqrt{١٢}$$

نأخذ $\text{أ} = \sqrt{١٢}$

٩) من نقطة على ارتفاع (٨٠) متر من سطح الارض قذف جسيم رأسيا الى اعلى وفق اقتران المسافة $\text{ف}(\text{ن}) = ٦٤\text{ن} - ١٦\text{ن}^{٢}$ ، جد :

أ) اقصى ارتفاع يصل اليه الجسيم

ب) الزمن الذي بعده يعود الى نقطة القذف

ج) الزمن الذي بعده يعود الى سطح الارض

د) متى تصبح سرعة الجسيم ٤٠م / ث

هـ) مجموعة القيم $\text{ن} \geq ٠$ التي تكون عندها $\text{ع}(\text{ن}) > ٠$

الحل :

$$\text{ف} = ٦٤\text{ن} - ١٦\text{ن}^{٢}$$

أ) $\text{ع} = \text{ف}' = ٦٤ - ٣٢\text{ن} = ٠ \Leftarrow \text{ن} = ٢$

اقصى ارتفاع من نقطة القذف

$$\text{ف}(٢) = ٦٤ \times ٢ - ١٦ \times ٤ = ١٢٨ - ٦٤ = ٦٤$$

عن سطح الارض يكون اقصى ارتفاع هو

$$٦٤ + ٨٠ = ١٤٤\text{م}$$

ب) $\text{ف} = ٠ \Leftarrow ٦٤\text{ن} - ١٦\text{ن}^{٢} = ٠$

$$\Leftarrow ١٦\text{ن}(٤ - \text{ن}) = ٠ \Leftarrow \text{ن} = ٠ \quad ، \quad \text{ن} = ٤ \checkmark$$

ج) ف عن الارض $= ٦٤\text{ن} - ١٦\text{ن}^{٢} + ٨٠$

وعندما يصل سطح الارض تكون $\text{ف} = ٠$

$$٦٤\text{ن} - ١٦\text{ن}^{٢} + ٨٠ = ٠$$

$$١٦\text{ن}^{٢} - ٦٤\text{ن} - ٨٠ = ٠ \quad \div ١٦$$

$$\text{ن}^{٢} - ٤\text{ن} - ٥ = ٠ \Leftarrow (\text{ن} - ٥)(\text{ن} + ١) = ٠$$

$$\Leftarrow \text{ن} = ٥ \quad ، \quad \text{ن} = -١$$

نأخذ $\text{ن} = ٥$

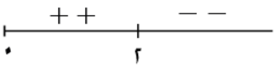
د) ع = ٦٤ − ٣٢ن = ٤٠ ⇐ ٦٤ − ٤٠ = ٣٢ن

٢٤ = ٣٢ن ⇐ ن = $\frac{٢٤}{٣٢} = \frac{٣}{٤}$

هـ) ندرس اشارة (ع)

ع = ٦٤ − ٣٢ن = ٠ ⇐ ن = ٢

ع > ٠ في [٠، ٢)



١٠) قذفت كرة من قمة برج ارتفاعه ١٠٠م حسب العلاقة ف(ن) = أن − ٥ن² حيث أ > ٠ وكانت سرعة الكرة عند ملامستها الارض هي ٦٠م / ث ، اوجد قيمة الثابت (أ)

الحل :

ف(ن) = أن − ٥ن²

عند ملامستها سطح الارض ⇐ ف(ن) + ١٠٠ = ٠

⇐ أن − ٥ن² + ١٠٠ = ٠ ......(١)

ف′(ن) = أ − ١٠ن ⇐ أ − ١٠ن = −٦٠

⇐ ن = $\frac{+٦٠ + أ}{١٠}$

عوض قيمة (ن) في (١)

$أ\left(\frac{٦٠ + أ}{١٠}\right) - ٥\left(\frac{٦٠ + أ}{١٠}\right)^{٢} + ١٠٠ = ٠$

١٢٠أ + ٢أ² − ٣٦٠٠ − ١٢٠أ − أ² + ٢٠٠٠ = ٠

أ² − ١٦٠٠ = ٠ ⇐ أ = ±٤٠

لكن أ > ٠ ⇐ أ = ٤٠

مثال (٨) :

اذا كانت ق = $\sqrt{س^{٣} - ٣س}$ ، ما القيم الحرجة على [−٢، ٢]

الحل :

ق′ = $\frac{٣س^{٢} - ٣}{٢ \times \sqrt{س^{٣} - ٣س}}$

البسط :

٣س² − ٣ = ٠

⇐ س = ١، −١

المقام :

س³ − ٣س = ٠

س(س² − ٣) = ٠

س = ٠، $\sqrt{٣}$، −$\sqrt{٣}$

القيم الحرجة : {−٢، ٢، ١، −١، ٠، −$\sqrt{٣}$، $\sqrt{٣}$}

مثال (٩) :

اوجد فترات التزايد والتناقص لكل مما يلي:

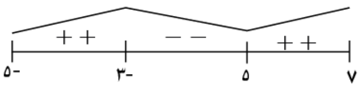
١) ق = $\frac{س^{٣}}{٣}$ − س² − ١٥س − ١٢ ، س ∈ [−٥، ٧]

الحل :

ق′ = س² − ٢س − ١٥ = ٠

(س − ٥)(س + ٣) = ٠ ⇐ س = ٥، −٣

متناقص [−٣، ٥]



متزايد [−٥، −٣] [٥، ٧]

٢) ق = ٥جاس لكل [٠، ٢π]

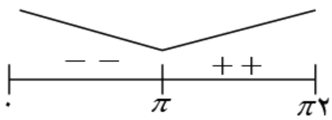
الحل :

ق′ = −٥جاس = ٠ ⇐ جاس = ٠

⇐ س = π، ٢π

القيم الحرجة : {٠، π، ٢π}

متزايد على [π، ٢π]



متناقص [٠، π]

٣) ق(س) = س − |س − ٣| ، س ∈ [−٢، ٦]

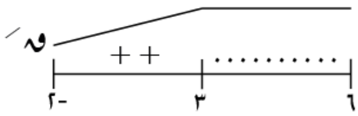
الحل :

٣ − س = ٠ ⇐ س = ٣

$ق(س) = س - \begin{cases} ٣ - س &، \quad -٢ \le س < ٣ \\ س - ٣ &، \quad ٣ \le س \le ٦ \end{cases}$

$$= \begin{cases} -٣ + ٢\text{س} & ، \quad -٢ \le \text{س} < ٣ \\ ٣ & ، \quad ٣ \le \text{س} \le ٦ \end{cases}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} ٢ & ، \quad -٢ < \text{س} < ٣ \\ ٠ & ، \quad ٣ < \text{س} < ٦ \end{cases}$$



متزايد على $[-٢ ، ٣]$

ثابت $[٣ ، ٦]$

مثال (١٠) :

اذا كان ق متزايد على (ع) ، (هـ) متناقص على (ع)

وكان $\text{ل}(\text{س}) = ٧\text{ق}(\text{س}) - ٢\text{هـ}^٣(\text{س})$ ، بين ان ل متزايد على (ع)

الحل :

$\text{ل}' = ٧\text{ق}' - ٦\text{هـ}^٢(\text{س}) \times \text{هـ}'(\text{س})$

$\text{ق}' > ٠ \Leftarrow ٧\text{ق}' > ٠$

$\text{هـ}^٢ > ٠$ لانه مربع

$\text{هـ}' < ٠$ لانه متناقص

$\text{هـ}^٢ \times \text{هـ}' < ٠ \Leftarrow -٦\text{هـ}^٢ \times \text{هـ}' > ٠$

$\Leftarrow \text{ل}' =$ موجب + موجب = موجب $\Leftarrow$ ل متزايد

مثال (١١) :

احسب القيم القصوى لكل مما يلي :

١) $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س}^٣ - ٩\text{س})^{\frac{1}{3}}$

الحل :

$$\text{ق}'(\text{س}) = \tfrac{1}{3}(\text{س}^٣ - ٩\text{س})^{\frac{-2}{3}}(٣\text{س}^٢ - ٩)$$

$$= \frac{٣\text{س}^٢ - ٩}{٣(\text{س}^٣ - ٩\text{س})^{\frac{2}{3}}} = \frac{٣\text{س}^٢ - ٩}{٣\sqrt[3]{(\text{س}^٣ - ٩\text{س})^٢}}$$

البسط :

$٣\text{س}^٢ - ٩ = ٠$

$\Leftarrow \text{س} = \pm\sqrt{٣}$

المقام :

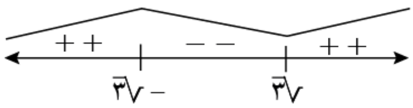
$\text{س}^٣ - ٩\text{س} = ٠$

$\text{س}(\text{س}^٢ - ٩) = ٠$

$\text{س} = ٠ ، ٣ ، -٣$

القيم الحرجة $\{\pm\sqrt{٣} ، \pm ٣ ، ٠\}$

لان المقام موجب ندرس اشارة البسط



متزايد $(-\infty ، -\sqrt{٣}] [\sqrt{٣} ، \infty)$

متناقص $[-\sqrt{٣} ، \sqrt{٣}]$

$\text{س} = -\sqrt{٣}$ عظمى محلية

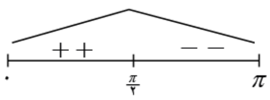
$\text{س} = \sqrt{٣}$ صغرى محلية

٢) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س جاس} + \text{جتاس}$ ، $\text{س} \in [٠ ، \pi]$

الحل :

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{س جتاس} + \cancel{\text{جاس}} - \cancel{\text{جاس}} = ٠$

$\text{س جتاس} = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٠ ، \frac{\pi}{2}$



$\text{ق}(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} + ٠ = \frac{\pi}{2}$ عظمى مطلقة

$\text{ق}(٠) = ٠ + ١ = ١$ صغرى

$\text{ق}(\pi) = ٠ + (-١) = -١$ صغرى مطلقة

مثال (١٢) :

جد قيم كل من الثابتين أ ، ب التي تجعل للاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^٣ + \text{أس}^٢ + \text{ب س}$ نقطتين حرجتين عند $\text{س} = -١$ ، $\text{س} = ٢$

الحل :

$\text{ق}'(\text{س}) = ٣\text{س}^٢ + ٢\text{أس} + \text{ب}$

$\text{ق}'(-١) = ٣ - ٢\text{أ} + \text{ب} = ٠$

$\Leftarrow -٢\text{أ} + \text{ب} = -٣ \ldots\ldots(١)$

$\text{ق}'(٢) = ١٢ + ٤\text{أ} + \text{ب} = ٠$

$\Leftarrow ٤\text{أ} + \text{ب} = -١٢ \ldots\ldots(٢)$

بالطرح : $٦\text{أ} = -٩ \Leftarrow \text{أ} = \frac{-٩}{٦} = \frac{-٣}{٢}$

بالتعويض : $-٢ \times \frac{-٣}{٢} + \text{ب} = -٣$

$٣ + \text{ب} = -٣ \Leftarrow \text{ب} = -٦$

مثال (١٣) :

اوجد فترات التقعر للأعلى وللأسفل ونقاط الانعطاف لكل مما يلي :

١) ق = ٢جتاس + $\frac{١}{٢}$ جا٢س على [٠، ٢π]

الحل :

ق$'$ = −٢جاس + $\frac{١}{٢}$ × ٢جتا٢س

ق$''$ = −٢جتاس − ٢جا٢س = ٠

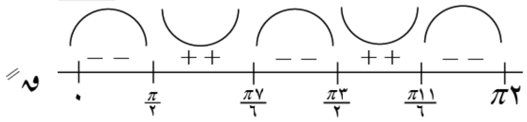
ق$''$ = −٢جتاس − ٢(٢جاس جتاس) = ٠

−٢جتاس (١ + ٢جاس) = ٠

−٢جتاس = ٠ ⇐ س = $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$

١ + ٢جاس = ٠ ⇐ جاس = $-\frac{١}{٢}$

⇐ س = $\frac{٧\pi}{٦}$ ، $\frac{١١\pi}{٦}$



نقاط الانعطاف :

($\frac{\pi}{٢}$ ، ٠) ($\frac{٧\pi}{٦}$ ، $\frac{-٣\sqrt{٣}}{٤}$) ($\frac{٣\pi}{٢}$ ، ٠) ($\frac{١١\pi}{٦}$ ، $\frac{٣\sqrt{٣}}{٤}$)

٢) ق = س + $\frac{٤}{س}$

الحل :

ق غير متصل عندما س = ٠

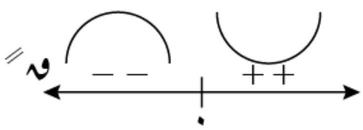
ق$'$ = ١ − $\frac{٤}{س^٢}$

ق$''$ = $\frac{٤ \times ٢س}{س^٤}$ = $\frac{٨}{س^٣}$

ق$''$ غير موجودة عندما س = ٠

مقعر للأسفل (−∞، ٠)

مقعر للأعلى (٠، ∞)

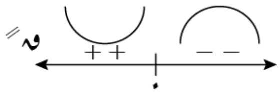


٣) ق = س$^{\frac{٣}{٥}}$

الحل :

ق$'$ = $\frac{٣}{٥}$ س$^{\frac{-٢}{٥}}$ ⇐ ق$''$ = $\frac{-٦}{٢٥}$ س$^{\frac{-٧}{٥}}$ = $\frac{-٦}{٢٥ س^{\frac{٧}{٥}}}$

ق$''$ غير موجودة عندما س = ٠



نقطة الانعطاف : (٠،٠)

٤) ق = س^٢ + $\frac{١٢٨}{س}$ ، فما القيم القصوى باستخدام المشتقة الثانية

الحل :

ق$'$ = ٢س − $\frac{١٢٨}{س^٢}$ = ٠

٢س = $\frac{١٢٨}{س^٢}$ ⇐ س^٣ = ٦٤ ⇐ س = ٤

ق$''$ = ٢ + $\frac{١٢٨ \times ٢س}{س^٤}$ ⇐ ق$''$(٤) = ٦ > ٠

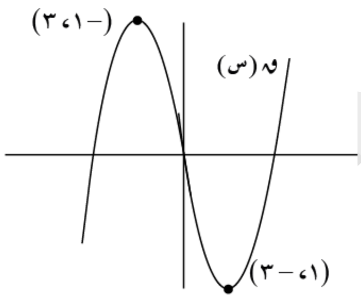
⇐ صغرى محلية عندما س = ٤ وهي

ق(٤) = ١٦ + ٣٢ = ٤٨

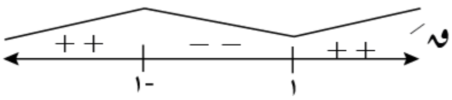
مثال (١٤) :

١) الرسم المجاور يمثل ق كثير حدود

اوجد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى وفترات التقعر ونقاط الانعطاف



الحل :

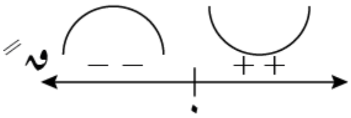


متزايد في (−∞، −١] [١، ∞)

متناقص [−١، ١]

ق(−١) = ٣ قيمة عظمى محلية

ق(١) = −٣ قيمة صغرى محلية



مقعر للاسفل $(\infty, 0]$

مقعر للاعلى $[0, \infty)$

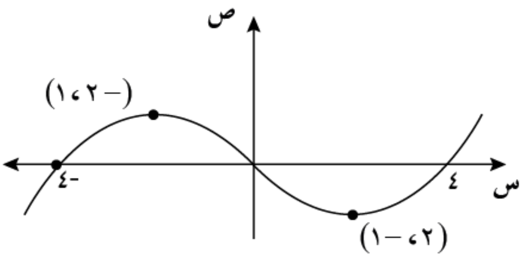
نقطة الانعطاف $(0, 0)$

٢) الشكل المجاور يمثل ق′(س)

أ) ما القيم الحرجة

ب) اوجد فترات التزايد والتناقص

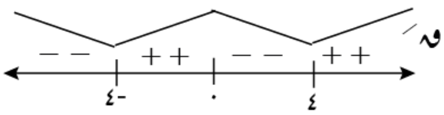
ج) فترات التقعر للأعلى وللأسفل



الحل :

أ) القيم الحرجة

$\{-4, 0, 4\}$



ب) متزايد في $[-4, 0]$ $[4, \infty)$

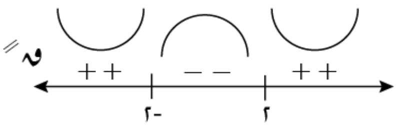
متناقص $(-\infty, -4]$ $[0, 4]$

ق(−٤) قيمة صغرى محلية

ق(٤) قيمة صغرى محلية

ق(٠) قيمة عظمى محلية

ج) مقعر للاسفل



$[-2, 2]$

مقعر للأعلى $(-\infty, -2]$ $[2, \infty)$

نقاط الانعطاف $(2, ق(2))$ $(-2, ق(-2))$

زوايا الانعطاف :

ظاه$_1$ = ق′(−٢) = ١ ⇐ ه$_1$ = ٤٥

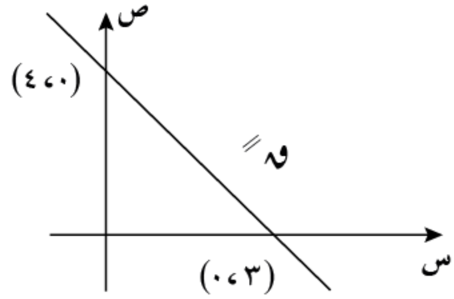
ظاه$_2$ = ق′(٢) = −١ ⇐ ه$_2$ = ١٣٥

٣) الرسم المجاور يمثل منحنى ق″(س) ، جد :

أ) فترات التقعر ونقاط الانعطاف

ب) اوجد ق″(٢)

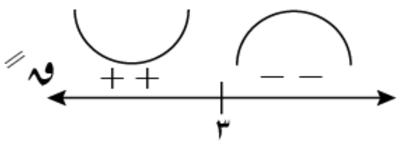
ج) اذا كانت س = ١ ، س = ٥ ، فما القيم الحرجة والقيم القصوى وفترات التزايد والتناقص



الحل :

أ) مقعر لاعلى

$(-\infty, 3]$



مقعر للاسفل

$[3, \infty)$

نقاط الانعطاف $(3, ق(3))$

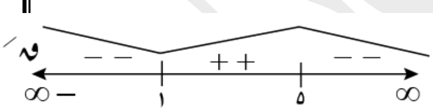
ب) ق″ = ميل ق″ = $\frac{0-4}{0-3} = \frac{-4}{3}$

ج) ق′(١) = ٠

ق″(١) = موجبة ⇐ صغرى محلية عندما س = ١

ق′(٥) = ٠

ق″(٥) = سالبة ⇐ عظمى محلية عندماس = ٥



متزايد في $[1, 5]$

متناقص $(-\infty, 1]$ $[5, \infty)$